Numerická matematika - výcuc
LS 2009/2010, FMFI UK

Chyby a nepresnosti reportujte na *kovac zavináč fotopriestor.sk*

16. mája 2010

1 Úvod

1.1 Literatúra

- Babušíková, Slodička, Weisz - Numerické metódy
- Mila - Numerické metódy algebry
- Přikryl - Numerické metódy matematickej analýzy
- Elden, Wittmeyer-Koch - Numerical Analysis: An Introduction
- Demidovič - Základy numerickej matematiky
- Vilásek - Numerické metódy

1.2 Chyby

- neodstrániteľná nepresnosť - z modelu
- chyby metódy - napr. z useknutia nejakého rozvoja
- numerické chyby - zo zaokrúhlenia

1.3 Numerická stabilita

„Úloha, algoritmus, metóda, riešenie sú **stabilné**, ak sú **dobre podmienené**, tj. málo citlivé na poruchy v údajoch a **numericky stabilné** tj. málo citlivé na vplyv zaokrúhľovacích chýb. Numerická realizácia algoritmu musí byť numericky stabilná".

Príklad. Systém rovníc

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 & + & 6x_2 & = 8 \\ 2x_1 & + & 6.000001x_2 & = 8.000001 \end{array}$$

má riešenie $x_1 = 1, x_2 = 1$. Systém

$$\begin{array}{lcrcl} 2x_1 & + & 6x_2 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 5.999999x_2 & = & 8.000001 \end{array}$$

má riešenie $x_1 = 7, x_2 = -1$.

1.4 Reprezentácia čísiel v počítači

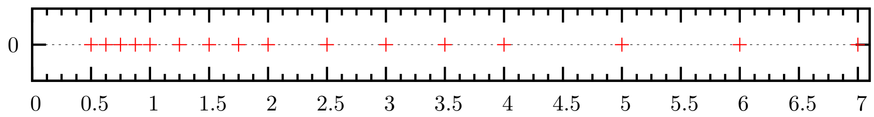
Majme množinu počítačových čísiel $M(q, t, L, U)$, kde:

- q = veľkosť sústavy (binárna, desiatková, ...)
- t = počet číslic v mantise
- L = dolná hranica exponentu
- U = horná hranica exponentu

Potom máme $2(q-1)q^{t-1}(U-L+1)+1$ zobraziteľných rôznych čísiel.

Napr. pre počítač $M(2, 2, -1, 2)$ máme najväčšie kladné číslo $1.11_2 \times 2^2$ a najmenšie kladné číslo $1.00_2 \times 2^{-1}$.

Obr. 1: Kladné čísla zobraziteľné počítačom $M(2, 2, -1, 2)$



Neplatí asociatívny zákon. *Príklad ($t = 3$).*

$$\begin{aligned} (728 - 728) + 0.01 &= 0.01 \\ 728 + (-728 + 0.01) &= 0 \end{aligned}$$

1.5 Chyba pri sčítaní a odčítaní

Majme $x_1, x_2 > 0$, a ich aproximácie $x_1 \approx \bar{x}_1, x_2 \approx \bar{x}_2$. Potom ako absolútne chyby označujeme $\Delta_1 = x_1 - \bar{x}_1, \Delta_2 = x_2 \approx x_2$. Absolútna chyba súčtu je potom

$$|s - \bar{s}| \leq |x_1 - \bar{x}_1| + |x_2 - \bar{x}_2| = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Relatívna chyba súčtu je

$$\left|\frac{s - \bar{s}}{s}\right| \leq \frac{\Delta_1}{x_1 + s} + \frac{\Delta_2}{x_2 + s} \leq \frac{\Delta_1}{|x_1|} + \frac{\Delta_2}{|x_2|} = Rel(\bar{x}_1) + Rel(\bar{x}_2).$$

Pozor na relatívnu chybu pri číslach s podobnou absolútnou hodnotou –

$$Rel(x_1 + x_2) = \left|\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{x_1 + x_2}\right|$$

– menovateľ zlomku môže byť veľmi malý a relatívna chyba výrazne narastie.

Príklad. Majme $x_1 = 0.996, \bar{x}_1 = 1.00, x_2 = -0.994, \bar{x}_2 = -0.99$. Relatívne chyby aproximácií sú malé, ale relatívna chyba súčtu je veľká:

$$\begin{array}{rcccccccc} Rel(\bar{x}_1) & = & \left|\frac{x_1-\bar{x}_1}{x_1}\right| & = & \left|\frac{-0.004}{0.996}\right| & < & 0.005 & = & 0.5\% \\ Rel(\bar{x}_1) & = & \left|\frac{x_2-\bar{x}_2}{x_2}\right| & = & \left|\frac{0.004}{0.994}\right| & < & 0.005 & = & 0.5\% \\ Rel(\bar{x}_1+\bar{x}_2) & = & \left|\frac{\Delta_1+\Delta_2}{x_1+x_2}\right| & = & \frac{0.008}{0.002} & = & 4 & = & 400\%. \end{array}$$

2 Diferenčný počet

2.1 Diferencia

- nech je dané $h > 0$ a $c \in \mathbb{R}$, nech f je definovaná v bodoch c a $c + h$. Potom rozdiel $\Delta f(c) = f(c+h) - f(c)$ je **diferencia** funkcie f v bode c, číslo h nazveme **diferenčným krokom**.
- nech existuje $\Delta f(x)$ pre všetky $x \in m \subset \mathbb{R}$, pri konštantnom diferenčnom kroku h. Potom rozdiely $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \forall x \in m$ definujú funkciu, ktorú nazývame **diferenciou** funkcie f na množine m.

Nech h je dif. krok, $x \in m$ a $\Delta f(x) = g(x)$. Potom:

$$\Delta(kf(x)) = k\Delta f(x) \tag{1}$$

$$\Delta(f_1(x) \pm f_2(x)) = \Delta f_1(x) \pm \Delta f_2(x) \tag{2}$$

$$\Delta(f_1(x) \cdot f_2(x)) = (\Delta f_1(x))f_2(x) + f_1(x)\Delta f_2(x) + +\Delta f_1(x)\Delta f_2(x) \tag{3}$$

$$\Delta^2(f(x)) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \tag{4}$$

$$\Delta^k(f(x)) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} f(x_i + (k-j)h) \tag{5}$$

$$\Delta x_{(k)} = kx_{(k-1)} \tag{6}$$

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) \tag{7}$$

$$\Delta^{-1}g(x) = \Delta^{-1}\Delta f(x) + c(x), \text{ kde } c(x) \text{ je taká, že } \Delta c(x) = c(x+1) - c(x) = 0 \tag{8}$$

$$\sum_{x=a}^{b} g(x) = f(b + h) - f(a) = [f(x)]_{x=a}^{b+h} \tag{9}$$

2.2 Diferenčné rovnice

V diferenčných rovniciach je okrem argumentu a funkcie aj diferencia funkcie.

$$F(n, y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, \ldots, \Delta^p y_n) = 0 \tag{10}$$

Lineárna rekurentná rovnica p-teho rádu má všeobecný tvar

$$y_{n+p} = b_{p-1,n+p}y_{n+p-1} + b_{p-2,n+p}y_{n+p-2} + \ldots + b_{0,n+p}y_n + a_{n+p}, \tag{11}$$

kde $b_{i,n+p}$ sú dané čísla, pričom $b_{0,n+p} \neq 0$. Ak $a_{n+p} = 0$, potom je relácia homogénna. Ak $b_{i,n+p}$ nezávisia od n, môžme ich písať ako b_i a relácia má konštantné koeficienty.

2.3 Lineárne rekurentné relácie 1. rádu

Lineárne rekurentné relácie 1. rádu majú tvar

$$y_n = b_n y_{n-1} + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Veta. Nech $b_n \neq 0$ pre $n \in \mathbb{Z}$, nech $c \in \mathbb{C}, n_0 \in \mathbb{Z}$. Potom postupnosť

$$y_n = \left(\frac{c}{b_{n_0}} + \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i=n_0}^{j} b_i} \right) \prod_{i=n_0}^{n} b_i \tag{13}$$

spĺňa

$$\begin{aligned} y_n &= b_n y_{n-1} + a_n, \quad n > n_0, \\ y_{n_0} &= c. \end{aligned} \tag{14}$$

Dôkaz. MI na n. Pre $n = n_0$ triviálne platí. Nech tvrdenie platí pre n, dokážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= b_{n+1}y_n + a_{n+1} \\ &= b_{n+1}\left(\frac{c}{b_{n_0}} + \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i=n_0}^{j} b_i} \right) \prod_{i=n_0}^{n} b_i + a_{n+1} \\ &= \left(\frac{c}{b_{n_0}} + \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i=n_0}^{j} b_i} \right) \prod_{i=n_0}^{n+1} b_i + a_{n+1} \\ &= \left(\frac{c}{b_{n_0}} + \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i=n_0}^{j} b_i} + \frac{a_{n+1}}{\prod_{i=n_0}^{n+1} b_i} \right) \prod_{i=n_0}^{n+1} b_i \\ &= \left(\frac{c}{b_{n_0}} + \sum_{j=n_0+1}^{n+1} \frac{a_j}{\prod_{i=n_0}^{j} b_i} \right) \prod_{i=n_0}^{n+1} b_i. \end{aligned}$$

2.4 Lineárne rekurentné homogénne relácie 2. rádu

Lineárne rekurentné homogénne relácie 2. rádu majú tvar

$$y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Riešenia hľadáme v tvare $y_n = z^n, z \neq 0$ (je to podpriestor dimenzie dva). Hľadáme také z, aby platilo

$$z^{n+2} + b_1 z^{n+1} + b_2 z^n = 0, \text{ tj. } z^n(z^2 + b_1 z + b_2) = 0. \tag{16}$$

To platí, len ak je výraz $z^2 + b_1 z + b_2$ rovný nule – tento výraz nazývame **charakteristická rovnica** – má ten istý stupeň a tie isté koeficienty ako pôvodná diferenčná rovnica. Rozlišujeme tri prípady riešenia charakteristickej rovnice:

1. Ak má charakteristická rovnica dva rôzne korene z_1, z_2, potom $\{z_1^n\}$, $\{z_2^n\}$ sú dve riešenia diferenčnej rovnice. Pritom

$$z_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b_1^2 - 4b_2} - b_1}{2}. \tag{17}$$

Všeobecné riešenie diferenčnej rovnice má potom tvar

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n, \tag{18}$$

kde sa konkrétne hodnoty c_1, c_2 určia podľa začiatočných podmienok. Postupnosti $\{z_1^n\}, \{z_2^n\}$ sú lineárne nezávislé. *Dôkaz.* Nech sú lineárne závislé, tj. $c_1 z_1^n + c_2 z_2^n = 0$, pričom $c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0 \forall n$. Spravme sústavu

$$\begin{pmatrix} z_1^n & z_2^n \\ z_1^{n+1} & z_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ak má mať homogénna sústava netriviálne riešenie, musí byť determinant sústavy rovný nule pre každé n.

$$\begin{vmatrix} z_1^n & z_2^n \\ z_1^{n+1} & z_2^{n+1} \end{vmatrix} = z_1^n z_2^{n+1} - z_1^{n+1} z_2^n = z_1^n z_2^n (z_2 - z_1) = 0 \tag{20}$$

To je však spor: $z_1^n z_2^n \neq 0$ pretože riešenie je netriviálne a $z_1 - z_2 \neq 0$ pretože riešenia sú rôzne.

2. Ak má charakteristická rovnica jeden dvojnásobný koreň z^n, potom prvé riešenie je postupnosť $\{z^n\}$ a druhé riešenie postupnosť $\{nz^n\}$ alebo $\{nz^{n-1}\}$. Zoberme si dvojicu $\{z^n\}$ a $\{nz^n\}$. Determinant sústavy je

$$\begin{vmatrix} z^n & nz^n \\ z^{n+1} & (n+1)z^{n+1} \end{vmatrix} = (n+1)z^{2n+1} - nz^{2n+1} = \\ z^{2n+1} + nz^{2n+1} - nz^{2n+1} = z^{2n+1} \neq 0 \quad \forall n, \tag{21}$$

takže riešenia sú lineárne nezávislé (podobne pre druhú dvojicu). Ďalej ukážeme, že ak $\{z^n\}$ je riešením, tak aj $\{nz^n\}$ je riešením:

$$\begin{aligned} y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n &= 0 \\ y_n &= n z^n \\ y_{n+1} &= (n+1) z^{n+1} \\ y_{n+2} &= (n+2) z^{n+2} \end{aligned}$$

Keďže z je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice, tak je aj koreň jej derivácie (tj. $2z + b_1$). Potom platí

$$\begin{aligned} &(n+2) z^{n+2} + b_1 (n+1) z^{n+1} + b_2 n z^n = \\ &= n z^n (z^2 + b_1 z + b_2) + z^{n+1} (2z + b_1) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Všeobecné riešenie má potom tvar $y_n = c_0 z^n + c_1 n z^n = (c_0 + c_1 n) z^n$, čo je vlastne polynóm stupňa o jedno menej krát koreň na n-tú.

3. Ak má charakteristická rovnica komplexne združené korene $z_1 = a + ib, z_2 = a - ib, z_{1,2} = |z| \cos\varphi \pm i \sin\varphi, (0 < \varphi \leq \pi)$, tak všeobecné riešenie má tvar

$$\begin{aligned} y_n &= c_1 |z|^n (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n + c_2 |z|^n (\cos\varphi - i \sin\varphi)^n \\ &= c_1 |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + c_2 |z|^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \\ &= (c_1 + c_2) |z|^n \cos n\ \varphi + |z|^n (ic_1 - ic_2) \sin n\varphi \\ &= k_1 |z|^n \cos n\ \varphi + k_2 |z|^n \sin n\varphi, \end{aligned}$$

kde $k_1 = c_1 + c_2, k_2 = ic_1 - ic_2$.

Veta. Nech $b_1, b_2, A, B \in \mathbb{R}, n_0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, y_{n_0} = A, y_{n_1} = B$. Potom existuje práve jedno riešenie rovnice

$$y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.5 Lineárne rekurentné nehomogénne relácie 2. rádu

Lineárne rekurentné nehomogénne relácie 2. rádu majú všeobecný tvar

$$y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n = a_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Veta. Princíp superpozície. Nech V je nejaká postupnosť, ktorá je riešením (23). Potom každá postupnosť Y, ktorá je riešenie (23) sa dá zapísať ako Y = U + V kde U je riešenie (15). Naopak, nech V je riešenie (23) a U je riešenie (15), potom Y = U + V je riešenie (23).

Takže postupuje sa tak, že sa nájde všeobecné riešenie homogénnej rovnice, jedno partikulárne riešenie nehomogénnej a z toho sa zostaví všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice.

$$
\begin{aligned}
V_{n+2} + b_1 V_{n+1} + b_2 V_n &= a_n \\
Y_{n+2} + b_1 Y_{n+1} + b_2 Y_n &= a_n \\
(Y_{n+2} - V_{n+2}) + b_1(Y_{n+1} - V_{n+1}) + b_2(Y_n - V_n) &= 0 \\
U_n &= Y_n - V_n
\end{aligned}
$$

Ak a_n je polynóm, riešenie hľadáme v tvare polynómu, ak je $a_n = cq^n$, riešenie hľadáme v tvare $y_n = dq^n$.

3 Počítanie hodnôt štandardných funkcií

3.1 Transformácia argumentu

- nepresná, takže ju treba robiť v dvojnásobnej presnosti

3.2 CORDIC algoritmus

Slúži na výpočet trigonometrických funkcií dosť rýchlo a dosť presne. Chceme napr. $\left|\frac{\Delta \sin\beta_0}{\sin\beta_0} < \frac{1}{2}2^{-23}\right|$.

- veľké x transformujeme s dvojitou presnosťou do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$
- na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ pre malé β aproximujeme $\sin\beta = \beta$
- inak použijeme CORDIC

Pre aké malé β stačí $\sin\beta = \beta$?

$$
\begin{aligned}
\sin\beta &= \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \cdots \\
\left|\frac{\Delta \sin\beta_0}{\sin\beta_0}\right| &< \frac{\frac{\beta^3}{3!}}{\beta} = \frac{\beta^2}{6} \leq \frac{1}{2}2^{-t} \\
\beta = m2^{-e} &\Rightarrow \beta^2 = m^2 2^{-2e} < 4\cdot 2^{-2e} \\
\frac{\beta^2}{6} < \frac{4\cdot 2^{-2e}}{6} = \frac{2}{3}2^{-2e} < \frac{1}{2}2^{-t} &\Rightarrow 2^{-2e} \leq \frac{3}{4}2^{-t} \\
-2e \leq \log_2\frac{3}{4} - t &\Rightarrow e \geq -\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{3}{4} - t\right) \\
e \geq \frac{1}{2}(t - \log_2 0.75) &\doteq \frac{1}{2}(t + 0.41) < \frac{1}{2}(t+1)
\end{aligned}
$$

Takže ak $e > \frac{1}{2}(t+1)$ použijeme $\sin\beta = \beta$, ak $e \in \langle 0; \frac{1}{2}(t+1)\rangle$ použijeme CORDIC s transformáciou v $2t$ bitoch.

4 Hľadanie koreňov nelineárnych rovníc $f(x) = 0$

4.1 Metóda prostej iterácie

4.2 Newtonova metóda

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{24}$$

Chyba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^2} = \frac{|\varphi''(\bar{x})|}{2}, \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{25}$$

4.3 Metóda regula falsi

$f(a)f(b) < 0$

$$s = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \tag{26}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ak} & f(a)f(s) < 0 & \text{tak} & b := s \\ \text{ak} & f(s)f(b) < 0 & \text{tak} & a := s \end{array} \tag{27}$$

4.4 Metóda tetív

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{28}$$

4.5 Viacrozmerný Newtonov algoritmus

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[J(\vec{x}^{(k)})\right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) \tag{29}$$

5 Výpočet $\sqrt{A}$

$A = 1.b_1b_2\ldots b_t \times 2^e, a = c_1c_0.d_1d_2\ldots d_{t-1}, 1 \leq a < 4$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \tag{30}$$

$c_1c_0.d_1d_2$ sú uložené v tabuľke a podľa nich sa začína iterovať, stačia tri iterácie.

6 Riešenie sústav lineárnych rovníc

Nenulový vektor $\vec{x}$ je vlastný vektor $n\times n$ matice A, ak existuje λ tak, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Číslo λ je vlastné číslo matice. Rovnica $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ má netriviálne riešenie len ak $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Riadková a stĺpcová norma matice sú

$$||A||_R = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{31}$$

$$||A||_S = \max_i \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{32}$$

Pre zodpovedajúce si normy platí

$$\begin{aligned} ||A\vec{x}|| &\le ||A|| \cdot ||\vec{x}|| && (33) \\ ||AB|| &\le ||A|| \cdot ||B|| && (34) \\ \left|\left|A^2\right|\right| &\le ||A|| \cdot ||A|| \ = ||A||^2 && (35) \\ & && (36) \end{aligned}$$

Riešme $A\vec{x} = \vec{b}$. Iterácie majú všeobecný tvar

$$\vec{x}^{(k+1)} = C \cdot x^{(k)} + g \tag{37}$$

6.1 Metóda postupných aproximácií

$$\begin{aligned} C &= (I - A) && (38) \\ g &= \vec{b} && (39) \\ & && (40) \end{aligned}$$

6.2 Jacobiho metóda

$$\begin{aligned} A &= L + D + U && (41) \\ C &= -D^{-1}(L+U) && (42) \\ g &= D^{-1}\vec{b} && (43) \\ & && (44) \end{aligned}$$

6.3 Gaussova-Seidelova metóda

$$\begin{aligned} A &= L + D + U && (45) \\ C &= -(L+D)^{-1}U && (46) \\ g &= (L+D)^{-1}\vec{b} && (47) \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) && (48) \end{aligned}$$

7 Aproximácie funkcií

7.1 Interpolácia polynómom

Máme postupnosti $\{x_i\}_{i=0}^n, \{f(x_i)\}_{i=0}^n$, chceme taký $p(x) \in \mathbb{P}_n$ aby $p(x_i) = f(x_i) \forall i$.

7.2 Lagrangeov interpolačný polynóm

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) && (49)\\
l_j(x) &= \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} && (50)
\end{aligned}
$$

Nevýhoda: pri pridaní nového uzla treba znova prepočítavať koeficienty.

7.3 Newtonov interpolačný polynóm

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) && (51)\\
p_n(x) &= \frac{1}{x_n - x_0} \left[(x_n - x)\, p_{n-1}^{(0,n-1)}(x) + (x - x_0)\, p_{n-1}^{(1,n)}(x) \right] && (52)\\
c_n &= \frac{c_{n-1}^{(1)} - c_{n-1}^{(0)}}{x_n - x_0} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = && (53)\\
&= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} && (54)
\end{aligned}
$$

Koeficienty sa rátajú dynamickým programovaním $d_{s,k} = \frac{d_{s,k-1} - d_{s-1,k-1}}{x_s - x_{s-k}}$. Podčiarknuté hodnoty sú koeficienty Newtonovho polynómu.

x_i	$f(x_i)$			
x_0	$\underline{f(x_0)}$			
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0, x_1]}$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$\underline{f[x_0, x_1, x_2]}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\underline{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$

7.4 Chyba interpolačného polynómu

$$
\max |f(x) - p(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|, \quad M_{n+1} = \max_{x \in \langle a,b \rangle} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \tag{55}
$$

7.5 Čebyšeove interpolačné polynómy

Tie sú najpresnejšie

$$T_0(x) = 1 \tag{56}$$

$$T_1(x) = x \tag{57}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = \cos(n \arccos x) \tag{58}$$

Spomedzi všetkých polynómov n-tého stupňa sa práve Čebyševove normalizované polynómy na $\langle a, b\rangle$ najmenej odchyľujú od nuly:

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |\bar{p}_n(x)| \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} \left|\bar{T}_n^{\langle a,b\rangle}(x)\right| = (b-a)^n \cdot 2^{1-2m} \tag{59}$$

7.6 Zovšeobecnený Newtonov interpolačný polynóm pre viacnásobné uzly

	$f(u_i) = F_{i,0}$			
$u_0 = x_0$	$\underline{F_{00}}$			
$u_1 = x_1$	F_{10}	$\underline{F_{11}}$		
$u_2 = x_2$	F_{20}	F_{21}	$\underline{F_{22}}$	
$u_3 = x_3$	F_{30}	F_{31}	F_{32}	$\underline{F_{33}}$

$$F_{s,k} = \frac{F_{s,k-1} - F_{s-1,k-1}}{u_s - u_{s-k}} \tag{60}$$

$$F^*_{s,k} = \frac{f^{(k)}(u_s)}{k!} \tag{61}$$

7.7 Splajny

Na intervale $\langle a, b\rangle = \langle a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\rangle$ máme hodnoty $f(x_i)$, chceme po častiach interpolovať polynómami nižšieho stupňa.

$$S_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{62}$$

Platí, že ak $f(x) \in C^2\langle a, b\rangle$ tak $\forall x \in \langle a, b\ \rangle : |S(x) - f(x)| \leq ch^2$, kde $h = \max(x_{i+1} - x_i)$

7.7.1 Lineárne splajny

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) && (63) \\
l_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{pre} \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{pre} \quad x_1 \leq x \leq x_n \end{cases} && (64) \\
l_i(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x_0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{pre} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{pre} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{pre} \quad x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases} && (65) \\
l_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x_0 \leq x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{pre} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} && (66)
\end{aligned}
$$

7.7.2 Kubické splajny

$$
\begin{aligned}
h_i &= x_{i+1} - x_i && (67) \\
S_i''(x) &= M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} && (68) \\
S_i'(x) &= -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + A_i && (69) \\
S_i(x) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + B_i && (70) \\
A_i(x) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_{i+1} - M_i) && (71) \\
B_i &= f(x_i) - M_i \frac{h_i^2}{6} && (72)
\end{aligned}
$$

Koeficienty M_i vypočítame sústavou rovníc z podmienky spojitosti prvých derivácií $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$. V tomto mám ešte guláš.

7.8 Metóda najmenších štvorcov

Máme spojitú $f(x)$ a chceme $f(x) \approx f_n(x)$ tak, aby $\int_a^b w(x) \left[f(x) - f_n(x)\right]^2$ bol minimálny (spomedzi všetkých polynómov nanajvýš n-tého stupňa). Skalárny súčin dvoch funkcií je $(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$.

7.9 Diskrétna metóda najmenších štvorcov

8 Výber empirického vzorca

9 Numerická kvadratúra - výpočet integrálu fcie

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} H_j f(x_j) + e_n(f) \tag{73}$$

Ak poznáme uzly x_i, chceme to presné pre polynómy až do n-tého stupňa, ak nepoznáme, tak do $2n-1$ stupňa. $h = \frac{b-a}{n}$.

9.1 Newtonova-Cotesova kvadratúra

9.2 Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{74}$$

9.3 Zložené lichobežníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + \frac{f(x_m)}{2}\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) \tag{75}$$

9.4 Zložené Simpsonovo pravidlo

$h = \frac{b-a}{2m}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2j+1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m})\right] - \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \tag{76}$$

9.5 Gaussove kvadratúry, Hermitova interpolácia

9.5.1 Gaussov-Legendreov kvadratúrny vzorec

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(x_j) + \frac{y_n}{A_n^2(2n)!} f^(2n)(\xi) \tag{77}$$

9.5.2 Gaussov-Hermitov kvadratúrny vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(x_j) + e_n f \tag{78}$$

9.5.3 Gaussov-Lagerov kvadratúrny vzorec

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} H_j f(x_j) + e_n f \tag{79}$$

9.5.4 Gaussov-Čebyšeovov kvadratúrny vzorec

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(x_j) + e_n f = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) + e_n(f) \tag{80}$$

10 Numerická derivácia

Funkciu $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ aproximujeme

$$\begin{aligned}
D_+(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} && (81)\\
D_-(h) &= \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} && (82)\\
D_0(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} && (83)\\
|D_+(h) - f'(x_0)| &\leq c_1 h && (84)\\
|D_0(h) - f'(x_0)| &\leq c_2 h^2 && (85)\\
& && (86)
\end{aligned}$$

10.1 Richardsonova extrapolácia

Keď sme na hranici počítačovej presnosti, tak chyba aproximácie derivácie narastá (pretože je príliš veľká chyba zo zaokrúhlenia). Takže sa snažíme nájsť optimálnu hodnotu kroku tak, aby neboli chyby príliš veľké.

$$\begin{aligned}
T(h) &= f'(x_0) + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \ldots && (87)\\
T(h) &= f'(x_0) + b_1 h^2 + O(h^4) && (88)\\
T_{i,k} &= T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{(2^p)^k - 1} && (89)
\end{aligned}$$

p je hlavný člen chyby, pre D_+, D_- je 1, pre D_0 je 2.

$p=2$	$D_0(h)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\frac{h}{2^0}$	T_{00}				
$\frac{h}{2^1}$	T_{10}	T_{11}			
$\frac{h}{2^2}$	T_{20}	T_{21}	T_{22}		
$\frac{h}{2^3}$	T_{30}	T_{31}	T_{32}	T_{33}	
$\frac{h}{2^4}$	T_{40}	T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}