Numerická matematika – Domáca úloha

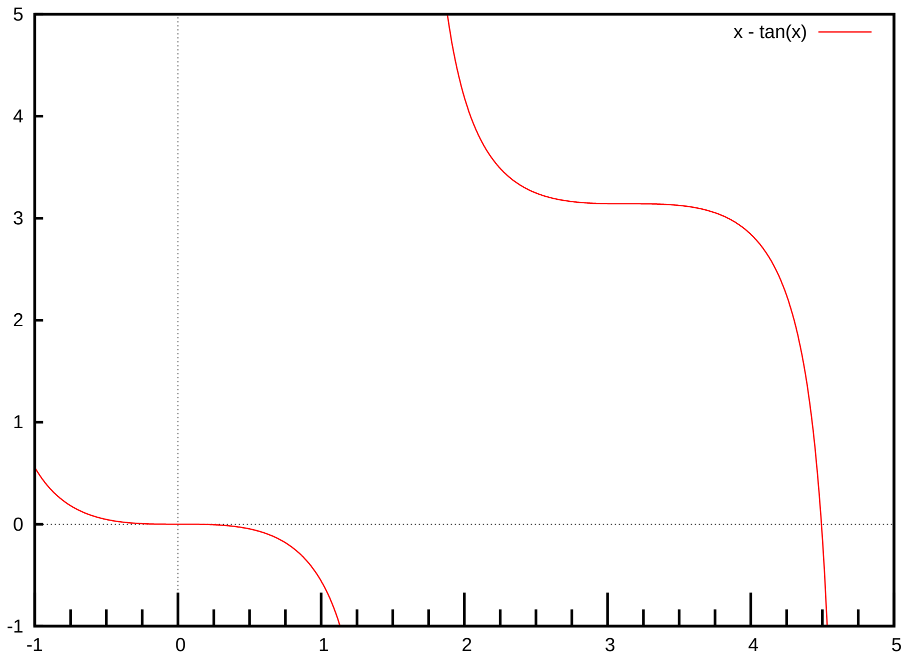
Peter Kováč

March 22, 2010

1. Metódou prostej iterácie vypočítaj prvý kladný koreň rovnice

$$x - \tan x = 0$$

Riešenie: podľa grafu funkcie $f(x) = x - \tan x$ vidíme, že prvý kladný koreň je niekde medzi 4.4 a 4.6.



Na tomto intervale však funkcia $f(x)$ nie je kontraktívna:

$$5.56 \doteq |1.3 + 4.26| \doteq |f(4.4) - f(4.6)| > |4.4 - 4.6| = 0.2$$

Teda nie sú splnené predpoklady postačujúcej podmienky konvergencie prostej iterácie, preto sa nedá táto metóda v tomto intervale použiť (pozn. metódou regula falsi sa koreň dá určiť: 4.49340945790906, konvergencia na 14 miest nastala po 47 iteráciách).

2. Newtonovou metódou vypočítaj koreň rovnice

$$\left(\sin x - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$$

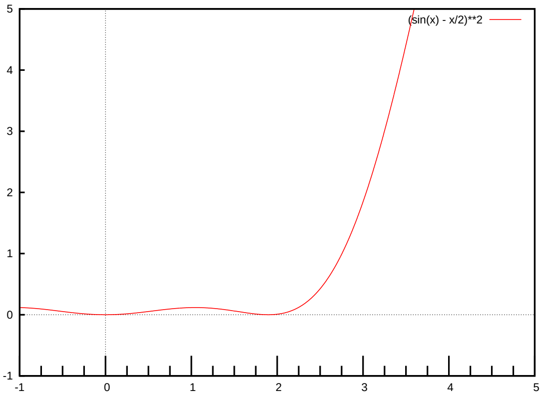
pomocou

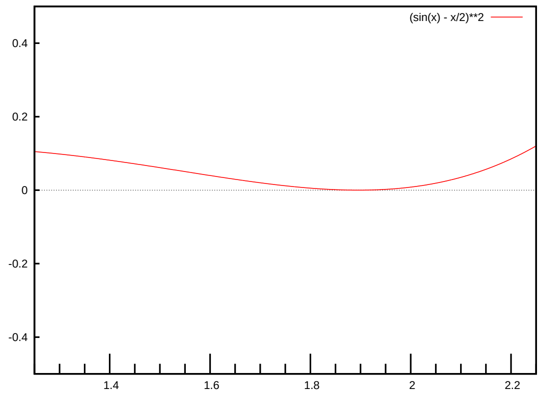
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a potom pomocou

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Riešenie: Pohľadom na graf funkcie odhadneme počiatočný bod $x_0 = 1.9$:





Derivácia $f'(x) = \sin 2x - x\cos\ x - \sin x + \frac{x}{2}$. Postupným iterovaním dostávame:

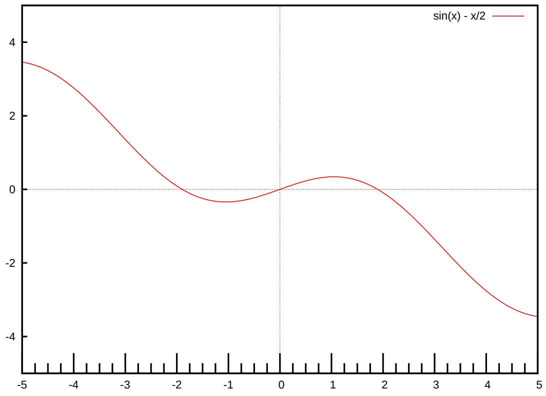
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad\qquad$ $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

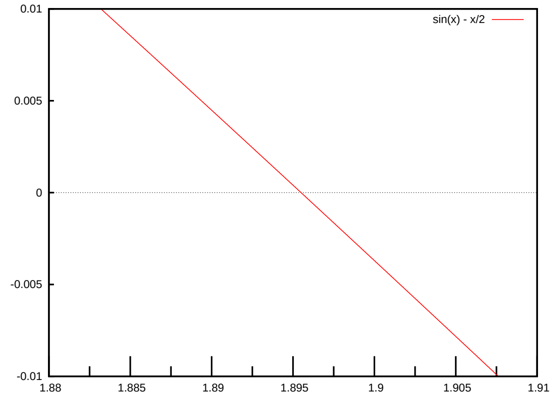
i	x_i	i	x_i	i	x_i
0	1.9	21	1.89549426919368	0	1.9
1	1.89775297024188	22	1.89549426811383	1	1.89550594048376
2	1.89662508993725	23	1.89549426757390	2	1.89549426711282
3	1.89606004784374	24	1.89549426730394	3	1.89549426703398
4	1.89577724997123	25	1.89549426716896		
5	1.89563578165988	26	1.89549426710147		
6	1.89556503013927	27	1.89549426706773		
7	1.89552965003509	28	1.89549426705085		
8	1.89551195889670	29	1.89549426704242		
9	1.89550311305589	30	1.89549426703820		
10	1.89549869006757	31	1.89549426703609		
11	1.89549647855644	32	1.89549426703504		
12	1.89549537279662	33	1.89549426703451		
13	1.89549481991566	34	1.89549426703424		
14	1.89549454347491	35	1.89549426703411		
15	1.89549440525447	36	1.89549426703405		
16	1.89549433614423	37	1.89549426703401		
17	1.89549430158911	38	1.89549426703400		
18	1.89549428431154	39	1.89549426703399		
19	1.89549427567276	40	1.89549426703398		
20	1.89549427135337	41	1.89549426703398		

3. Metódami delenia intervalov na polovice, regula falsi, newtonovou a tetív vypočítaj koreň rovnice

$$\sin x - \frac{x}{2} = 0$$

Riešenie: Pohľadom na graf funkcie $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ odhadneme vhodný začiatok iterácie $x_0 = 1.895$ (resp. interval $\langle 1.89; 1.9\rangle$):





(a) Metóda delenia intervalov.
Na intervale $\langle 1.89; 1.9\rangle$ ju môžme použiť $(-0.000016 \doteq f(1.89)f(1.9) < 0)$.

$$s = \frac{a+b}{2}$$

ak $f(a)f(s) < 0$ tak $\quad b := s$
inak $\quad a := s$

Iterácie:

i	s_i	i	s_i
1	1.89500000000000	22	1.89549426794052
2	1.89750000000000	23	1.89549426674843
3	1.89625000000000	24	1.89549426734448
4	1.89562500000000	25	1.89549426704645
5	1.89531250000000	26	1.89549426689744
6	1.89546875000000	27	1.89549426697195
7	1.89554687500000	28	1.89549426700920
8	1.89550781250000	29	1.89549426702783
9	1.89548828125000	30	1.89549426703714
10	1.89549804687500	31	1.89549426703248
11	1.89549316406250	32	1.89549426703481
12	1.89549560546875	33	1.89549426703365
13	1.89549438476563	34	1.89549426703423
14	1.89549377441406	35	1.89549426703394
15	1.89549407958984	36	1.89549426703408
16	1.89549423217773	37	1.89549426703401
17	1.89549430847168	38	1.89549426703397
18	1.89549427032471	39	1.89549426703399
19	1.89549425125122	40	1.89549426703398
20	1.89549426078796	41	1.89549426703398
21	1.89549426555634		

(b) Metóda regula falsi.
Na intervale $\langle 1.89; 1.9\rangle$ ju môžme použiť $(-0.000016 \doteq f(1.89)f(1.9) < 0)$.

$$s = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = a - \frac{\left(\sin a - \frac{a}{2}\right)(b-a)}{\sin b - \frac{b}{2} - \sin a + \frac{a}{2}}$$

ak $f(a)f(s) < 0$ tak $\quad b := s$
inak $\quad a := s$

Iterácie:

i	s_i	i	s_i
1	1.89547993399511	4	1.89549426703373
2	1.89549422978416	5	1.89549426703398
3	1.89549426693717	6	1.89549426703398

(c) Newtonova metóda.
Derivácia:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$$

Ďalší člen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - \frac{x}{2}}{\cos x_n - \frac{1}{2}}$$

Iterácie:

i	x_i	i	x_i
0	1.895	3	1.89549426703398
1	1.89549440847864	4	1.89549426703398
2	1.89549426703399		

(d) Metóda tetív.
Začiatok:

$$x_0 = 1.895$$

$$x_1 = 1.9$$

Ďalší člen:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1}} = x_n - \frac{\left(\sin x_n - \frac{x_n}{2}\right)(x_n - x_{n-1})}{\sin x_n - \frac{x_n}{2} - \sin x_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{2}}$$

Iterácie:

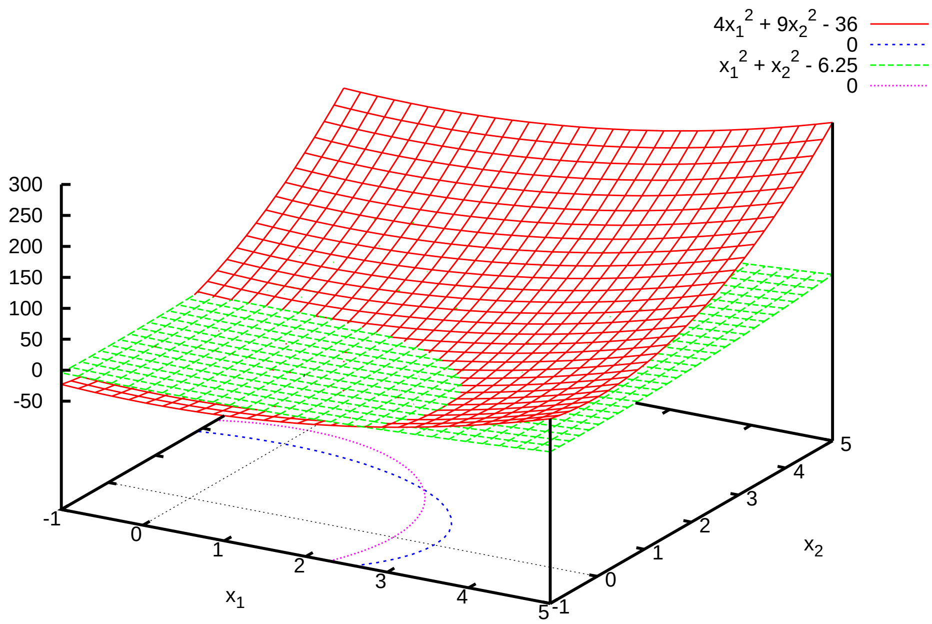
i	x_i	i	x_i
0	1.895	3	1.89549426369454
1	1.9	4	1.89549426703398
2	1.89549298206913	5	1.89549426703398

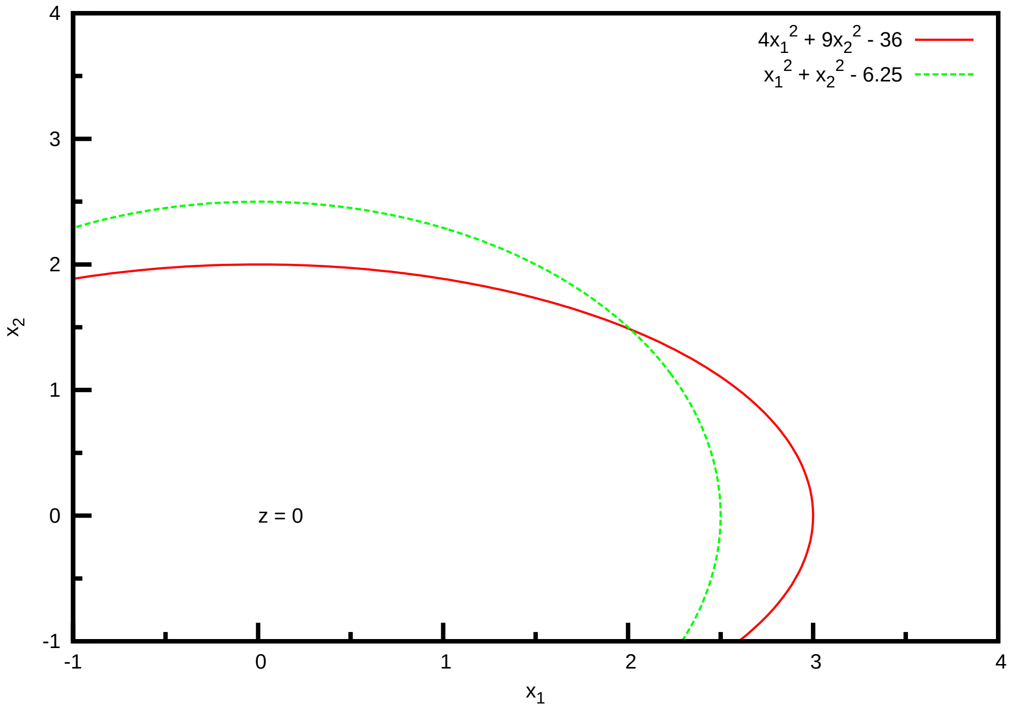
4. Urči priesečník v prvom kvadrante

$$4x_1^2 + 9x_2^2 - 36 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 6.25 = 0$$

Riešenie: z grafu (alebo numericky z rovníc) sa dajú odhadnúť počiatočné hodnoty $x_1^{(0)} = 2, x_2^{(0)} = 1.5$.


$4x_1^2 + 9x_2^2 - 36$
0
$x_1^2 + x_2^2 - 6.25$
0
300
250
200
150
100
50
0
-50
x_1
x_2


$4x_1^2 + 9x_2^2 - 36$
$x_1^2 + x_2^2 - 6.25$
z = 0
x_1
x_2

Ďalšie členy pre Newtonov viacrozmerný algoritmus:

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} + \frac{\partial_{x_2^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - \partial_{x_2^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})}{\partial_{x_1^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \partial_{x_2^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - \partial_{x_2^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \partial_{x_1^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})} =$$

$$= -\frac{f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})}{8x_1^{(n)}} - \frac{2x_1^{(n)}(f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - 4f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}))}{45x_2^{(n)}}$$

$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} + \frac{\partial_{x_1^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \partial_{x_1^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})}{\partial_{x_1^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \partial_{x_2^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - \partial_{x_2^{(n)}} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \partial_{x_1^{(n)}} f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})} =$$

$$= -\frac{4f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})}{10x_2^{(n)}}$$

Iterácie:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
0	2.00000000000000	1.50000000000000
1	1.97449845679012	1.48333333333333
2	2.01261246293245	1.48323970037453
3	2.01246117875269	1.48323969741913
4	2.01246117974981	1.48323969741913
5	2.01246117974981	1.48323969741913